

LAHENDUSED 10.KLASS

1. Vastus: 20 krooni

Lahendus:

Kui kokkulepitud kuupalk oli x krooni, siis esimesel nädalal sai Madis $0,25 \cdot x$ krooni, teisel nädalal $1,1 \cdot 0,25 \cdot x = 0,275 \cdot x$ krooni.

Kolmandal nädalal sai sulane Madis aga $0,6 \cdot (0,25 \cdot x + 0,275 \cdot x) = 0,315 \cdot x$ krooni.

Kolme nädalaga sai ta kokku $0,25 \cdot x + 0,275 \cdot x + 0,315 \cdot x = 0,84 \cdot x$ krooni. Neljandaks nädalaks jäi sulasel saada $x - 0,84 \cdot x = 0,16 \cdot x$ krooni, millele lisati preemiaks veel $0,01 \cdot x$ krooni. Seega sai Madis viimasel nädalal $0,17 \cdot x$ krooni ehk 3,4 krooni.

Järelikult $0,17 \cdot x = 3,4$, millest

$x = 20$ krooni.

Hindamine:

Tähistatud otsitav palk või mõni teine suurus ja avaldatud selle kaudu nelja päeva tasud 4p

Arvestades preemiat, koostatud võrdus ja leitud selle abil otsitav palk 3p

Märkus: Antud vaid õige vastus: 2p.

2. Vastus: parameetri m võimalikud väärtused on 22, 32 ja 212.

Lahendus:

Teisendame võrrandi $m^2 - x(x + 1) = 212$ kujule $x^2 + x + 212 - m^2 = 0$ ning avaldame sellest ruutvõrrandi lahendid: $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (212 - m^2)}}{2}$.

Selleks, et saadud lahendid oleks täisarvud, peab $1 - 4 \cdot (212 - m^2)$ olema täisruut ning paaritu arv, ehk siis $1 - 4 \cdot (212 - m^2) = n^2$, kus n on paaritu arv.

Teisendades antud võrrandit, saame võrrandi

$$4m^2 - n^2 = 847, \text{ ehk } (2m + n)(2m - n) = 847.$$

Arv 847 esitub algarvude korrutisena kujul $847 = 7 \cdot 11 \cdot 11$ ja kuna tegurid $(2m + n)$ ja $(2m - n)$ on samuti täisarvud, saame järgmised võimalikud võrrandisüsteemid:

$$\begin{cases} 2m + n = 1 \\ 2m - n = 847 \end{cases}, \begin{cases} 2m + n = 7 \\ 2m - n = 121 \end{cases}, \begin{cases} 2m + n = 77 \\ 2m - n = 11 \end{cases}, \begin{cases} 2m + n = 847 \\ 2m - n = 1 \end{cases},$$

mille lahendid on

$$\begin{cases} m = 212 \\ n = -423 \end{cases}, \begin{cases} m = 32 \\ n = -57 \end{cases}, \begin{cases} m = 22 \\ n = 33 \end{cases}, \begin{cases} m = 212 \\ n = 423 \end{cases}.$$

Seega parameetri m võimalikud väärtused on 22, 32 ja 212.

Hindamine:

Ruutvõrrandi diskriminandi leidmine (või lahendivalemi kasutamine x jaoks)	1p
Otsus, et diskriminant peab olema täisruut ning paaritu arv	1p
Jõudmine võrrandini $(2m + n)(2m - n) = 847$	1p
847 lahutamine algteguriteks ja vajalike võrrandisüsteemide koostamine	2p
Süsteemide lahendamine ja vastus (vähemalt 2 õiget m väärtust lahenduseta võiks anda 1 punkti ning 3 õiget väärtust 2 punkti)	2p

3.

Lahendus:

Ülesande tingimuste põhjal $\angle ADE = 7 \cdot \angle DBC$ ja $\angle BAD = \angle DAC$.

a) (*Piisavus*) Olgu $\angle ADB = 126^\circ$. Näitame, et kolmnurk ADB on võrdhaarne.

Trapetsis $BDEC$ on

$$\angle BDE = 360^\circ - \angle ADB - \angle ADE = 360^\circ - 126^\circ - 7 \cdot \angle DBC = 234^\circ - 7 \cdot \angle DBC.$$

Kuna trapetsi sisenurkade summa on 360° ,

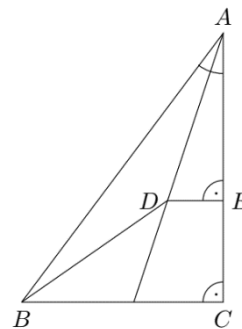
$$\text{saame võrduse } 360^\circ = 2 \cdot 90^\circ + \angle BDE + \angle DBC,$$

millest järeldub, et

$$180^\circ = 234^\circ - 7 \cdot \angle DBC + \angle DBC \text{ ja seega}$$

$$6 \cdot \angle DBC = 54^\circ \text{ ning } \angle DBC = 9^\circ \text{ ja}$$

$$\angle ADE = 7 \cdot \angle DBC = 7 \cdot 9^\circ = 63^\circ.$$



Täisnurksest kolmnurgast ADE saame nüüd, et

$$\angle DAE = \angle DAC = \angle BAD = 90^\circ - 7 \cdot \angle DBC = 90^\circ - 7 \cdot 9^\circ = 90^\circ - 63^\circ = 27^\circ.$$

Kolmnurgast ADB leiame, et

$$\angle ABD = 180^\circ - \angle ADB - \angle BAD = 180^\circ - 126^\circ - 27^\circ = 27^\circ.$$

Saime, et nurgad ABD ja BAD on võrdse suurusega. Seega ka $|BD| = |DA|$ m.o.t.t.

b) (*Tarvilikkus*) Olgu kolmnurk BDA võrdhaarne. Et D asub kolmnurga ABC sisepiirkonnas, siis $|AD| = |BD|$ ja seega $\angle ABD = \angle BAD = \angle DAC$. Näitame, et $\angle ADB = 126^\circ$.

Täisnurksest kolmnurgast ABC saame, et $3 \cdot \angle ABD + \angle DBC = 90^\circ$ ja täisnurksest kolmnurgast ADE leiame, et $\angle ADE + \angle DAE = 7 \cdot \angle DBC + \angle ABD = 90^\circ$. Nendest võrdustest järeldub, et $\angle ABD = 27^\circ$. Leiame $\angle ADB = 180^\circ - 2 \cdot 27^\circ = 126^\circ$. m.o.t.t.

Hindamine:

Tehtud õige joonis	1p
Tõestatud tingimuse piisavus	3p
Tõestatud tingimuse tarvilikkus	3p

- 4. Vastus:** a) m ja n on mõlemad paaritud arvud;
b) m ja n on erineva paarsusega.

Lahendus:

Vaatame kolme järgmist võimalikku juhtu.

- 1) Mõlemad arvud on paarisarvud, st leiduvad naturaalarvud k ja l nii, et $m = 2k$ ja $n = 2l$. Siis summa $m^2 + n^2 = (2k)^2 + (2l)^2 = 4k^2 + 4l^2 = 4(k^2 + l^2)$ on naturaalarv, mis jagub arvuga 4, st annab sellega jagamisel jäägi 0.
Analoogiliselt saame, et vahe $m^2 - n^2 = (2k)^2 - (2l)^2 = 4k^2 - 4l^2 = 4(k^2 - l^2)$ on täisarv, mis jagub arvuga 4, st annab sellega jagamisel jäägi 0.
Seega, meie ülesandes ei saa soovitud tulemuse saamiseks olla mõlema küsimuse korral kaks paarisarvu.
- 2) Mõlemad arvud on paaritud arvud, st leiduvad naturaalarvud k ja l nii, et $m = 2k + 1$ ja $n = 2l + 1$.
Siis summa
$$m^2 + n^2 = (2k + 1)^2 + (2l + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4l^2 + 4l + 1 = 4(k^2 + k + l^2 + l) + 2$$
on naturaalarv, mis annab jagamisel arvuga 4 jäägi 2.
Seega, juhul a) saame soovitud tulemuse, kui mõlemad arvud on paaritud arvud.

Sel juhul on vahe

$$m^2 - n^2 = (2k + 1)^2 - (2l + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 - 4l^2 - 4l - 1 = 4(k^2 + k - l^2 - l)$$

täisarv, mis jagub arvuga 4, st annab sellega jagamisel jäägi 0. Seega kahe paaritu arvu korral me juhul b) ei saa soovitud tulemust.

- 3) Vaatame juhtumeid, kui kaks arvu on erineva paarsusega.

Olgu $m = 2k + 1$ ja $n = 2l$.

Siis summa $m^2 + n^2 = (2k + 1)^2 + (2l)^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4l^2 = 4(k^2 + k + l^2) + 1$ on naturaalarv, mis annab jagamisel arvuga 4 jäägi 1, mis juhul a) ei anna soovitud tulemust. Samale järeldusele summa korral jõuame, kui m on paarisarv ja n on paaritu arv.

Sel juhul vahe $m^2 - n^2 = (2k + 1)^2 - (2l)^2 = 4k^2 + 4k + 1 - 4l^2 = 4(k^2 + k - l^2) + 1$ on täisarv, mis annab jagamisel arvuga 4 jäägi 1.

Kui nüüd $m = 2k$ ja $n = 2l + 1$, siis vahe

$$\begin{aligned} m^2 - n^2 &= (2k)^2 - (2l + 1)^2 = 4k^2 - 4l^2 - 4l - 1 = \\ &= 4(k^2 - l^2 - l) - 1 = 4(k^2 - l^2 - l - 1) + 3 \end{aligned}$$

on täisarv, mis annab jagamisel arvuga 4 jäägi 3.

Seega saame erineva paarsusega arvude korral juhul b) alati soovitud tulemuse.

Kokkuvõttes: $m^2 + n^2$ annab jagamisel arvuga 4 jäägi 2 ainult siis, kui m ja n on mõlemad paaritud arvud; $m^2 - n^2$ annab jagamisel arvuga 4 jäägi 1 ainult siis kui m on paaritu ja n paarisarv ning jäägi 3 ainult siis kui m on paarisarv ja n on paaritu arv.

Hindamine:

Analüüsitud juhtumit, kus mõlemad arvud on paarisarvud ja tehtud järelused ruutude summa ja vahe kohta 2p

Analüüsitud juhtumit, kus mõlemad arvud on paarisarvud ja tehtud järelused ruutude summa ja vahe kohta 2p

Analüüsitud juhtumeid, kus kaks arvu on erineva paarsusega ja tehtud järelused ruutude summa (1p) ja vahe kohta (2p) 3p

5. Vastus: Jah, kaart on pakis ülalt 14-ndal kohal.

Lahendus:

Et kokku on 27 kaarti, siis on selle paki kolmeks jaotamisel igas hunnikus täpselt 9 kaarti.

Kui Jüri jaotab kaardipaki esimest korda kolme hunnikusse ja nende taas kokku panemisel Mari mõeldud kaarti sisaldanud hunnik pannakse keskmiseks, siis on Mari mõeldud kaart selles pakis ühel positsioonidest 10. – 18.

Kui Jüri jaotab selle kaardipaki teist korda kolme hunnikusse, siis enne kaardipakis positsioonidel 10. – 18. olnud kaardid satuvad igas hunnikus 4. – 6. positsioonile.

Kui nüüd tõstetakse need kolm hunnikut taas kokku nii, et Mari mõeldud kaarti sisaldav hunnik jääb keskmiseks, siis Mari mõeldud kaart on saadud pakis ühel positsioonidest 13. – 15. Peale kolmandat korda paki kolme hunnikusse jaotamist satuvad selles pakis viimati positsioonidel 13. – 15. olnud kaardid igas hunnikus 5. kaardiks.

Kui nüüd Mari osutab hunnikule, milles oli tema mõeldud kaart ja see hunnik tõstetakse kolmandat korda pakis taas keskmiseks, on Mari mõeldud kaart saadud pakis keskmisel ehk 14. kohal.

Hindamine:

Tähelepanek, et igas hunnikus on alati täpselt 9 kaarti	1p
Leitud otsitava kaardi võimalikud positsioonid pakis pärast esimest tsüklit	2p
Leitud otsitava kaardi võimalikud positsioonid pakis pärast teist tsüklit	2p
Leitud otsitava kaardi koht pakis pärast kolmandat tsüklit	2p